

Modelado de trayectorias de drones mediante interpolación matemática para el análisis de la precisión de medición de superficies planas

Modeling of drone trajectories through mathematical interpolation for the analysis of measurement accuracy on planar surfaces

Dennis Gabriel Cuadrado Ayala*
Universidad Nacional de Chimborazo
Riobamba - Ecuador
dgcuaadrado.fic@unach.edu.ec
<https://orcid.org/0009-0005-2641-7546>

Klever Hernán Torres Rodríguez
Universidad Nacional de Chimborazo
Riobamba - Ecuador
ktorres@unach.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0002-3919-0812>

*Correspondencia:
dgcuaadrado.fic@unach.edu.ec

Cómo citar este artículo:
Cuadrado, D., & Torres, K. (2026). Modelado de trayectorias de drones mediante interpolación matemática para el análisis de la precisión de medición de superficies planas. *Esprint Investigación*, 5(1), 368-385. <https://doi.org/10.61347/ei.v5i1.255>

Recibido: 29 de diciembre de 2025

Aceptado: 3 de febrero de 2026

Publicado: 9 de febrero de 2026

Resumen: El uso de drones en levantamientos topográficos ha incrementado la eficiencia y la cobertura en la medición de superficies; sin embargo, la precisión de los resultados depende críticamente de la altura de vuelo, el tipo de trayectoria y el tratamiento matemático de los datos espaciales. En este contexto, el objetivo de este estudio fue modelar las trayectorias de drones mediante interpolación polinómica de Lagrange, con el fin de analizar su influencia en la precisión de la medición de superficies planas. La metodología adoptó un enfoque cuantitativo de tipo experimental-analítico, evaluando los errores de medición de área obtenidos por fotogrametría con drones a distintas alturas de vuelo (50 m, 80 m y 120 m) y comparándolos con un método tradicional de referencia. Se aplicaron pruebas estadísticas no paramétricas para identificar diferencias significativas, y se desarrollaron modelos geométricos de trayectorias lineales y parabólicas mediante técnicas de regresión, mínimos cuadrados e interpolación de Lagrange, incorporando simulaciones con diferentes configuraciones de nodos y métricas de error como RMSE y MAE. Los resultados evidenciaron que la altura de vuelo de 80 m minimiza el error de medición, y que las trayectorias parabólicas interpoladas presentan un desempeño significativamente superior en comparación con los recorridos rectilíneos. Asimismo, se demostró que la interpolación de Lagrange de bajo grado, empleando tres nodos representativos, ofrece el mejor equilibrio entre precisión y estabilidad numérica, evitando el fenómeno de Runge asociado a polinomios de alto orden. En conclusión, el estudio confirma que un modelado matemático adecuado de la trayectoria del dron contribuye de manera sustancial a mejorar la precisión topográfica y proporciona criterios objetivos para la planificación de vuelos fotogramétricos.

Palabras clave: Drones, fotogrametría, interpolación de Lagrange, modelado de trayectorias, precisión de medición.

Abstract: The use of drones in topographic surveys has increased efficiency and coverage in surface measurements; however, the accuracy of the results depends critically on flight altitude, trajectory type, and the mathematical processing of spatial data. In this context, the objective of this study was to model drone trajectories using Lagrange polynomial interpolation in order to analyze their influence on the accuracy of flat-surface measurements. The methodology adopted a quantitative experimental-analytical approach, evaluating area measurement errors obtained through drone-based photogrammetry at different flight altitudes (50 m, 80 m, and 120 m) and comparing them with a traditional reference method. Nonparametric statistical tests were applied to identify significant differences, and geometric models of linear and parabolic trajectories were developed using regression techniques, least squares, and Lagrange interpolation, incorporating simulations with different node configurations and error metrics such as RMSE and MAE. The results showed that a flight altitude of 80 m minimizes measurement error and that interpolated parabolic trajectories exhibit significantly superior performance compared to rectilinear paths. Furthermore, low-degree Lagrange interpolation using three representative nodes was shown to provide the best balance between accuracy and numerical stability, avoiding the Runge phenomenon associated with high-order polynomials. In conclusion, the study confirms that appropriate mathematical modeling of drone trajectories substantially improves topographic accuracy and provides objective criteria for the planning of photogrammetric flights.

Copyright: Derechos de autor 2026 Dennis Gabriel Cuadrado Ayala, Klever Hernán Torres Rodríguez.



Esta obra está bajo una licencia internacional Creative Commons Atribución-NonComercial 4.0.

Keywords: Drones, Lagrange interpolation, measurement accuracy, photogrammetry, trajectory modeling.

1. Introducción

En Ingeniería Civil, la obtención precisa de datos topográficos de terrenos es fundamental para garantizar la viabilidad y seguridad de los proyectos constructivos (Kang, 2025). El uso de drones como herramienta para el levantamiento de superficies ha revolucionado los métodos tradicionales, ofreciendo mayor rapidez y acceso a zonas complejas (Trubia et al., 2021). No obstante, la calidad y precisión de los datos recolectados dependen en gran medida de la trayectoria que el dron recorre durante el vuelo (Abid et al., 2025).

Desde el punto de vista matemático, estas trayectorias pueden modelarse como funciones interpoladas a partir de un conjunto de puntos conocidos (nodos), que representan coordenadas espaciales obtenidas mediante GPS u otros sensores (Poorvi et al., 2025). En este contexto, la interpolación de Lagrange ofrece una técnica sólida y explícita para construir funciones polinómicas que atraviesan dichos puntos, lo que permite simular trayectorias continuas del dron (Gimenez, 2018; Navas-Torres & Borrás, 2024).

Diversos estudios recientes han explorado aspectos relacionados con el uso de vehículos aéreos no tripulados (UAVs) para levantamientos topográficos. Brent et al. (2021) examinaron la practicidad y precisión de la cartografía topográfica mediante drones, comparándola con los métodos topográficos tradicionales, y concluyeron que la cartografía topográfica con drones puede generar mapas con una precisión aceptable para la nivelación general del sitio, además de ahorrar tiempo y reducir el error humano.

Dilmaç et al. (2026) evidenciaron que parámetros de procesamiento como la configuración de los ground control points (GCPs), la superposición de imágenes y los patrones de vuelo influyen significativamente en la calidad de los productos topográficos generados por UAVs. De manera similar, Lemus-Romani et al. (2025) evaluaron el impacto de diferentes configuraciones de parámetros de vuelo de UAVs (altura, solapamientos, ángulo de cámara y patrón) en la calidad visual de los ortomosaicos y la eficiencia operativa en un área urbana de 1.5 hectáreas, concluyendo que volar a menor altura aumenta el detalle visual a costa de una mayor duración del procesamiento, mientras que un solapamiento excesivo no garantiza una mejor calidad final.

Otra línea de investigación reciente se centra en el desarrollo de metodologías para la planificación de trayectorias de vuelo de UAVs, abordando retos como el diseño de rutas óptimas que consideren aspectos de eficiencia energética, seguridad y respuesta dinámica del sistema (Meng et al., 2025). En estos enfoques, si bien se examinan algoritmos avanzados y técnicas de planificación, generalmente no se profundiza en los efectos matemáticos de la interpolación sobre la precisión topográfica, dejando un espacio para investigaciones centradas en la relación entre el procesamiento numérico de trayectorias y la fidelidad de los datos captados (Kumar et al., 2025; Sheltami et al., 2025).

A pesar de los constantes avances, el problema de investigación que motiva este estudio radica en la necesidad de comprender cómo las características matemáticas de los métodos de interpolación polinómica, particularmente la interpolación de Lagrange, influyen en la precisión de las mediciones topográficas obtenidas mediante drones sobre superficies planas. Aunque la topografía con drones ha demostrado ser eficaz y precisa, no existe una evaluación exhaustiva del efecto de las configuraciones nodales o de la estructura de los polinomios interpolantes sobre el error métrico en los datos finales.

Además, el comportamiento oscilatorio de los polinomios de Lagrange de alto grado (fenómeno de Runge), así como la sensibilidad a la distribución de nodos, pueden introducir desviaciones no deseadas en las trayectorias simuladas, lo cual repercute en la calidad del levantamiento topográfico. Esto plantea

la necesidad de investigar cómo las características matemáticas de la interpolación polinómica afectan la fidelidad geométrica del vuelo respecto al terreno y, por ende, la precisión de los datos obtenidos.

Por lo tanto, el objetivo general del estudio es modelar trayectorias de drones mediante interpolación polinómica de Lagrange para analizar su influencia en la precisión de la medición de superficies planas (terrenos), en el contexto del levantamiento topográfico aplicado a la Ingeniería Civil.

Para ello, se establecen los siguientes objetivos específicos: (a) realizar un modelo comparativo del procesamiento matemático de datos topográficos obtenidos mediante métodos tradicionales y mediante drones, utilizando herramientas de análisis numérico e interpolación, para identificar las diferencias en la generación y precisión de superficies planas (terrenos); (b) desarrollar un modelo computacional de trayectorias de drones basado en interpolación de Lagrange y mínimos cuadrados, a partir de nodos seleccionados y coordenadas espaciales reales o simuladas, para representar de forma precisa el recorrido del dron sobre terrenos planos; y (c) evaluar el impacto de las trayectorias interpoladas en la precisión de las mediciones topográficas, mediante análisis comparativos y simulaciones con distintas configuraciones de nodos, a fin de validar la efectividad del modelo matemático propuesto frente a métodos tradicionales.

2. Metodología

Enfoque Metodológico y Diseño del estudio

La presente investigación adoptó un enfoque cuantitativo de tipo experimental-analítico, centrado en evaluar cómo la altura de vuelo y el tipo de trayectoria del dron influyeron en la precisión de las mediciones de áreas en superficies planas mediante fotogrametría. Este diseño integró análisis estadístico descriptivo e inferencial, modelamiento geométrico de trayectorias, interpolación polinómica por el método de Lagrange, simulación de configuraciones de nodos y validación gráfica y matemática, con el objetivo de determinar las condiciones óptimas de vuelo y el modelo geométrico más estable para la estimación de áreas.

Fase I: Evaluación del Efecto de la Altura de Vuelo sobre el error de medición

Posteriormente, se realizó un análisis descriptivo y exploratorio por altura, calculando la media del error, la desviación estándar, los valores mínimo y máximo, así como representaciones gráficas mediante diagramas de dispersión y líneas de tendencia. La verificación de supuestos estadísticos reveló que los errores no seguían una distribución normal, por lo que se empleó la prueba no paramétrica de Kruskal-Wallis para contrastar diferencias significativas entre alturas, seguida de la prueba post hoc de Dunn con corrección de Bonferroni. Los resultados indicaron que la altura de 80 m exhibía el menor error medio, menor variabilidad y diferencias estadísticamente significativas respecto a 50 m y 120 m, por lo que se seleccionó como la altura óptima para la fase subsiguiente.

Fase II: Evaluación de impacto por tipo de trayectoria

En la Fase II, con la altura fijada en 80 m, se evaluó el impacto del tipo de trayectoria, lineal o parabólica, en la precisión del modelo, junto con el efecto de la interpolación y la configuración de nodos. Para cada trayectoria, se obtuvieron 30 observaciones reales de coordenadas espaciales (x , y , z), área estimada y error absoluto, las cuales fueron ampliadas a 50 mediante la técnica de bootstrap. El análisis estadístico incluyó estadísticos descriptivos del error, verificación de normalidad mediante la prueba

de Shapiro-Wilk, histogramas y gráficos Q-Q, lo que nuevamente confirmó la no normalidad de los datos y justificó la aplicación de la prueba no paramétrica de Mann-Whitney para comparar el desempeño entre trayectorias.

Modelado geométrico

El modelamiento geométrico se centró en el plano XY a altura constante. Para la trayectoria lineal, se ajustó un modelo de regresión lineal $y = -2.82 - 1.518x$, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.99$, representando un desplazamiento rectilíneo uniforme. En contraste, la trayectoria parabólica se modeló mediante interpolación polinómica de Lagrange de segundo grado, $y = 29.888 + 0.1876x + 0.036x^2$, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.80$, donde el término cuadrático resultó estadísticamente significativo, validando su curvatura y la idoneidad de la interpolación polinómica.

Criterios de evaluación y validación

Se analizó el efecto de la configuración de nodos en la trayectoria parabólica, construyendo modelos interpolantes con distintas cantidades de puntos y evaluándolos mediante el error cuadrático medio (RMSE), el error absoluto medio (MAE) y gráficos de dispersión. Adicionalmente, la validación de los modelos se basó en criterios integrales: magnitud y variabilidad del error medio, significancia estadística, estabilidad geométrica y coherencia física del recorrido, lo que permitió asegurar la robustez de las conclusiones. Esta combinación validó de manera matemática y gráfica los hallazgos, garantizando el rigor metodológico del estudio.

3. Resultados

El análisis comparativo del procesamiento matemático de los datos topográficos se realizó a partir de mediciones obtenidas mediante un método tradicional con cinta métrica, empleado como valor de referencia del área real, y de mediciones adquiridas mediante dron a tres alturas de vuelo: 50 m, 80 m y 120 m. Para cada altura se dispuso inicialmente de 30 observaciones del área calculada por fotogrametría, a partir de las cuales se estimó el error como la diferencia entre el área medida con dron y el área obtenida por el método convencional.

Con el fin de mejorar la robustez del análisis, se implementó un procedimiento de remuestreo *bootstrap* estratificado por altura, generándose 20 observaciones adicionales por nivel de vuelo, lo que dio lugar a una base de datos ampliada de 150 registros (50 por altura, de los cuales 30 correspondieron a datos reales y 20 a datos simulados). El análisis descriptivo demostró que el paralelismo entre las estadísticas de los datos reales y simulados validó el procedimiento realizado y la idoneidad de la base ampliada para la comparación entre alturas. La Tabla 1 resume la estructura de la base de datos utilizada para el análisis comparativo.

Tabla 1

Descripción de la base de datos por altura de vuelo

Altura (m)	Tipo de dato	n	Área media (m ²)	DE	Área mín – max (m ²)
50	Real	30	2937.0	0.47	2936.0 – 2938.0
50	Simulado	20	2937.0	0.45	2936.0 – 2938.0

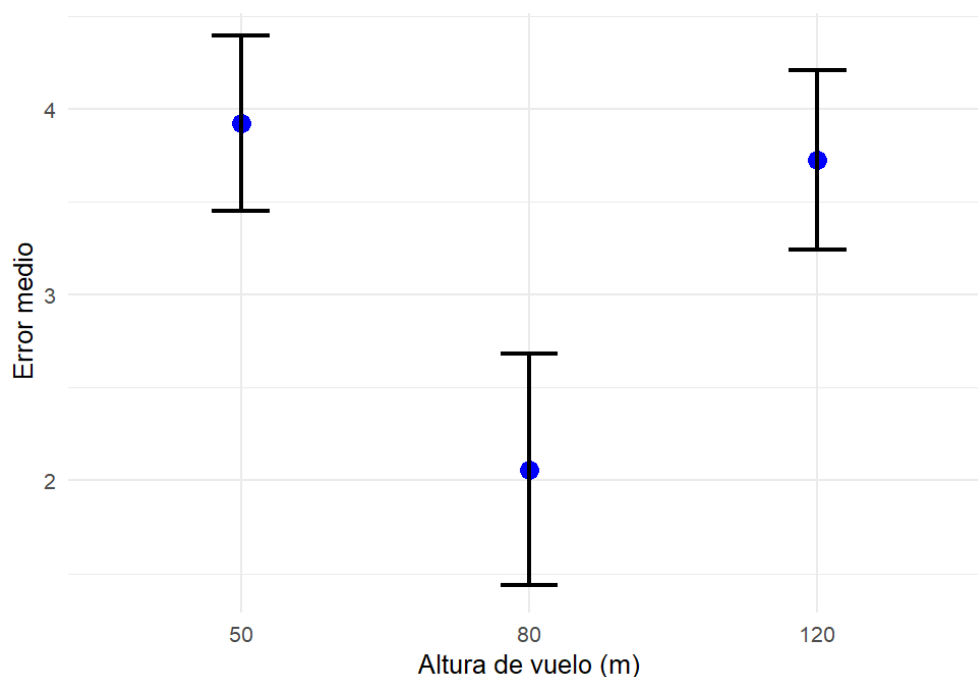
80	Real	30	2939.0	0.62	2938.0 – 2940.0
80	Simulado	20	2939.0	0.60	2938.0 – 2940.0
120	Real	30	2937.0	0.48	2937.0 – 2938.0
120	Simulado	20	2937.0	0.50	2937.0 – 2938.0

Comportamiento del error de medición según la altura de vuelo

Una vez consolidada la base de datos, se analizó el error de medición del área para cada altura, tomando como referencia el área real. La figura 1 mostró gráficamente un comportamiento no lineal del error con respecto a la altura de vuelo. A 50 m se observó un error medio elevado, mientras que a 80 m el error medio alcanzó su valor mínimo; a 120 m, el error volvió a incrementarse, mostrando un patrón similar al de 50 m. Este resultado reforzó la idea de que la relación entre altura de vuelo y error no es lineal, sino que presenta un mínimo en una altura intermedia, en coherencia con el objetivo del estudio.

Figura 1

Media del error en función de la altura de vuelo



Contrastes de normalidad e implicaciones para el modelo comparativo

Antes de aplicar pruebas inferenciales, se verificó el supuesto de normalidad del error mediante la prueba de Shapiro–Wilk para cada altura. Los resultados de la tabla 2 evidenciaron valores de p inferiores a 0,05 en los tres niveles de vuelo, lo que indicó el incumplimiento del supuesto de normalidad en todos los grupos. Estos resultados justificaron el uso de pruebas no paramétricas basadas en rangos para la comparación del error entre alturas.

Tabla 2*Prueba de normalidad de Shapiro–Wilk para el error por altura*

Altura (m)	Estadístico W	p - valor	Decisión ($\alpha = 0,05$)
50	W (50 m)	0.0322	Los datos no siguen una distribución normal
80	W (80 m)	0.0417	Los datos no siguen una distribución normal
120	W (120 m)	0.0146	Los datos no siguen una distribución normal

Comparación inferencial del error entre alturas de vuelo

Dado el incumplimiento del supuesto de normalidad, se aplicó la prueba no paramétrica de Kruskal–Wallis para evaluar si existían diferencias significativas en el error del cálculo del área entre las tres alturas de vuelo. El contraste arrojó un estadístico chi-cuadrado de 98,8 con 2 grados de libertad y un valor de p inferior a 0,05, por lo que se rechazó de forma concluyente la hipótesis nula de igualdad de medianas. La Tabla 3 recoge los principales resultados del contraste global de Kruskal–Wallis.

Tabla 3*Resultados de la prueba de Kruskal–Wallis para el error por altura*

Prueba	gl	χ^2	p - valor	Interpretación
Kruskal-Wallis	2	98.8	$< 2.2 \times 10^{-18}$	Diferencias significativas entre alturas

Por lo tanto, los hallazgos confirmaron que la altura de vuelo influye de manera significativa en el error del cálculo del área y que al menos una de las alturas presenta un comportamiento claramente distinto. Para identificar los pares de alturas responsables de estas diferencias, se aplicó la prueba post hoc de Dunn con corrección de Bonferroni. Los resultados de la Tabla 4 indicaron diferencias estadísticamente significativas entre 50 m y 80 m, así como entre 80 m y 120 m, pero no entre 50 m y 120 m.

Tabla 4*Prueba post-hoc de Dunn con corrección de Bonferroni*

Comparación	p-ajustada	Interpretación
120 m – 50 m	0.6086	No significativa
120 m – 80 m	8.97×10^{-15}	Diferencia altamente significativa
50 m – 80 m	1.49×10^{-19}	Diferencia altamente significativa

En términos prácticos, estos resultados demostraron que la variación del error con la altura no sigue una tendencia monótonamente creciente o decreciente, sino que presenta un mínimo en la altura intermedia, identificando a 80 m como la condición óptima de vuelo para el análisis posterior de trayectorias.

Trayectoria parabólica basada en mínimos cuadrados

A partir de ocho puntos experimentales correspondientes al recorrido parabólico del dron sobre el plano $z = 80$, se obtuvo la nube de nodos que sirvió de base para el modelado geométrico. Estos puntos, que representan posiciones discretas del dron durante el vuelo, se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5

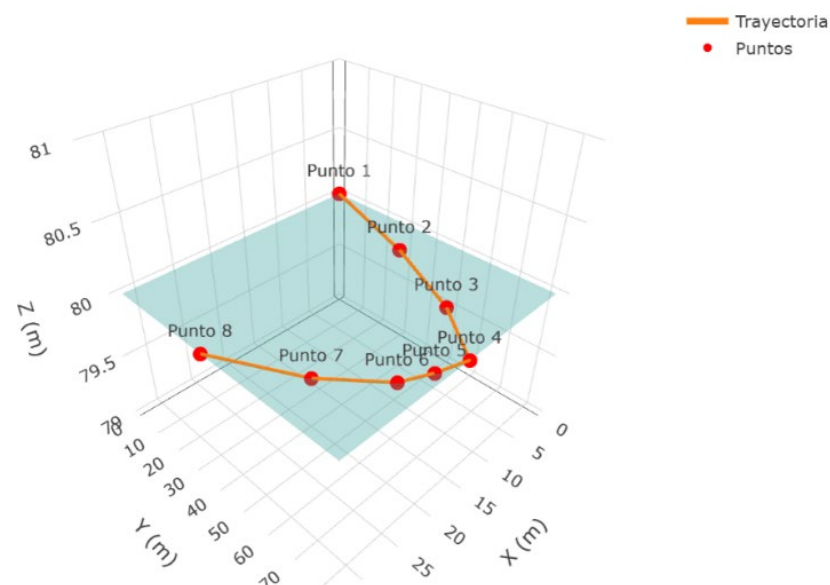
Nodos experimentales de la trayectoria parabólica a 80 m

Punto	Tipo	x (m)	y (m)	z (m)
1	Parábola	0,00	0,00	80
2	Parábola	5,00	38,16	80
3	Parábola	10,00	65,77	80
4	Parábola	15,00	82,84	80
5	Parábola	18,69	79,80	80
6	Parábola	22,00	75,74	80
7	Parábola	27,00	60,77	80
8	Parábola	32,00	35,49	80

La Figura 2 ilustró los puntos discretos sobre el plano horizontal y la curva interpolada que define la trayectoria parabólica, evidenciando un recorrido curvo suave a altura constante. El plano sombreado a $z = 80$ permitió interpretar el movimiento como estrictamente horizontal, simplificando el análisis geométrico de la trayectoria.

Figura 2

Trayectoria parabólica del dron sobre el plano z



Sobre estos ocho puntos se ajustó un modelo cuadrático mediante mínimos cuadrados ordinarios, de la forma $y = ax^2 + bx + c$, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$y(x) = -0,2467897x^2 + 8,948511x + 0,3362539$$

El ajuste presenta un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9954$ y un coeficiente de determinación ajustado $R_{aj}^2 = 0.9936$, lo que indica que el modelo explica más del 99,5 % de la variabilidad observada en la trayectoria. Los términos lineal y cuadrático resultaron altamente significativos ($p < 10^{-6}$), mientras que el intercepto no fue estadísticamente significativo, lo que confirma que la curvatura parabólica representa adecuadamente el movimiento del dron. Los residuos oscilaron aproximadamente entre $-2,02$ m y $3,80$ m y no presentaron patrones sistemáticos, lo cual respalda la idoneidad del modelo parabólico. La tabla 6 resume los valores observados, estimados y los errores correspondientes en cada nodo.

Tabla 6

Valores reales y estimados para la trayectoria parabólica

x (m)	y real (m)	y estimado (m)	Error (m)
0,0	0,0	0,336	-0,336
5,0	38,2	38,9	-0,749
10,0	65,8	65,1	0,628
15,0	82,8	79,0	3,80
18,7	79,8	81,4	-1,58
22,0	75,7	77,8	-2,02
27,0	60,8	62,0	-1,27
32,0	35,5	34,0	1,51

A partir de esta función se construyó la parametrización tridimensional del vuelo, considerando un parámetro continuo t que recorre el intervalo $[0,32]$:

$$x(t) = t, y(t) = -0,2467897t^2 + 8,948511t + 0,3362539, z(t) = 80, t \in [0,32]$$

Esta formulación paramétrica permite representar el desplazamiento del dron como un movimiento continuo sobre un plano horizontal, lo que facilita análisis posteriores relacionados con la velocidad, la aceleración y el control de la trayectoria.

Modelo por interpolación de Lagrange para la trayectoria parabólica

Con el fin de representar de manera exacta el recorrido del dron a partir de los nodos experimentales, se empleó interpolación polinómica de Lagrange sobre el conjunto de puntos (x_i, y_i) correspondientes a la trayectoria parabólica. El polinomio interpolante se definió como:

$$P(x) = \sum_{i=1}^n y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

En una primera etapa, se construyó un polinomio de grado siete utilizando los ocho nodos disponibles ($n = 8$), obteniéndose un interpolante que reproduce exactamente todos los puntos medidos, con residuo nulo en los nodos. Este polinomio de alto grado se utilizó principalmente como herramienta de validación matemática, con el objetivo de confirmar la coherencia de los datos experimentales y la correcta implementación del método de interpolación.

No obstante, dado que los polinomios de orden elevado tienden a presentar oscilaciones no deseadas y un comportamiento numérico inestable, el modelo de grado siete no se adoptó como representación final de la trayectoria. En su lugar, se seleccionaron tres nodos representativos (inicio, punto de máxima altura y final), a partir de los cuales se obtuvo un polinomio interpolante de segundo grado:

$$y(x) = 9,4170x - 0,2596x^2$$

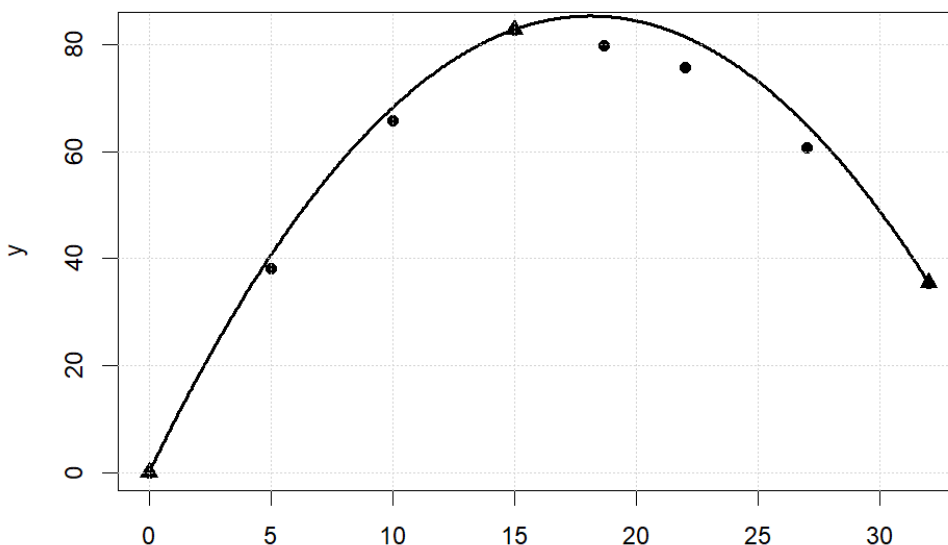
Este polinomio cuadrático proporciona una trayectoria parabólica suave y físicamente coherente, reduciendo las oscilaciones asociadas a polinomios de mayor grado. La correspondiente parametrización tridimensional, para $t \in [0,32]$, se expresa como:

$$x(t) = t, \quad y(t) = 9,4170t - 0,2596t^2, \quad z(t) = 80$$

La Figura 3 muestra la curva parabólica ajustada, que pasa exactamente por los tres nodos seleccionados, con buena concordancia visual respecto a la trayectoria observada y una geometría realista para el desplazamiento del dron. En este sentido, la interpolación de Lagrange con tres nodos ofrece un compromiso adecuado entre precisión y estabilidad numérica, manteniendo la forma parabólica y evitando el sobreajuste.

Figura 3

Lagrange con 2 nodos (grado 2)



Modelo paramétrico de la trayectoria rectilínea

Además del modelo parabólico, se consideró una trayectoria rectilínea ideal como caso de referencia para el movimiento del dron sobre el plano $z = 80$. En este escenario, la coordenada horizontal x permanece constante en 10 m, mientras que el desplazamiento ocurre exclusivamente a lo largo del

eje y , desde 0 m hasta 79,8 m, manteniendo una altura de vuelo constante. La trayectoria rectilínea se describió mediante la siguiente parametrización:

$$x(t) = 10, \quad y(t) = 79,8t, \quad z(t) = 80, \quad t \in [0,1]$$

Como alternativa, si se desea que el parámetro represente directamente la distancia recorrida, el modelo puede expresarse como:

$$x(s) = 10, \quad y(s) = s, \quad z(s) = 80, \quad s \in [0,79,8]$$

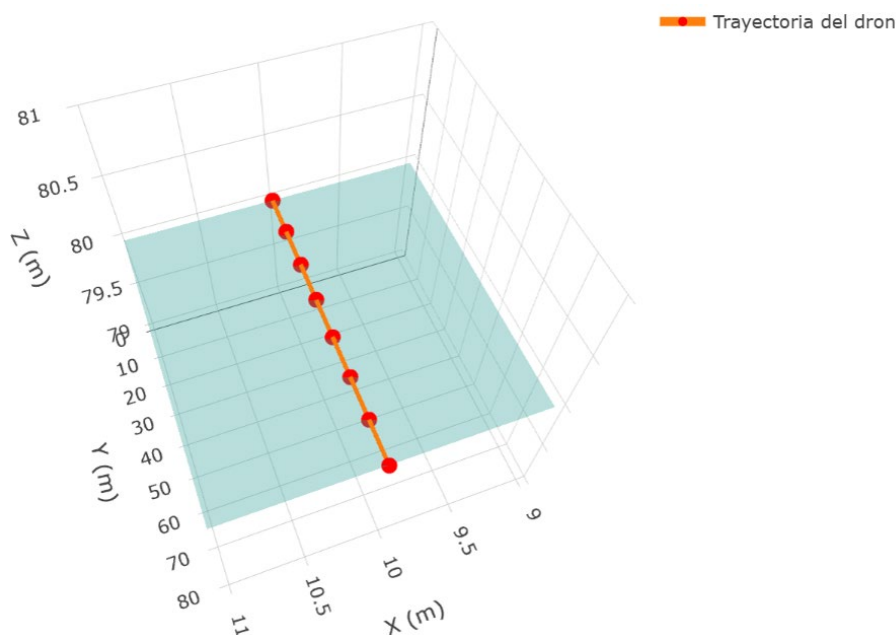
Dado que en esta trayectoria la coordenada x es constante, no es posible expresar el movimiento mediante una función del tipo $y = f(x)$ en sentido estricto, lo que limita el uso directo de la regresión lineal clásica con x como variable independiente. En este contexto, la representación paramétrica resulta más adecuada y, desde el punto de vista de la interpolación, la trayectoria rectilínea puede interpretarse como el resultado de una interpolación de Lagrange de primer grado entre dos nodos extremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , dado por:

$$P(t) = y_1 \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} + y_2 \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$$

En efecto, la interpolación de Lagrange aplicada a dos puntos conduce a un polinomio de primer grado que pasa exactamente por dichos nodos, lo que la hace matemáticamente equivalente al ajuste lineal en este caso particular. Por ello, no fue necesario un procedimiento adicional de interpolación para la trayectoria rectilínea, ya que la parametrización propuesta define completamente el recorrido del dron. La figura 4 representa esta trayectoria como un segmento vertical en el plano XY , con altura constante, correspondiente a un desplazamiento uniforme ideal.

Figura 4

Trayectoria rectilínea del dron sobre el plano $z=80$ m



En el caso de la trayectoria parabólica, el ajuste cuadrático ofrece un modelo altamente explicativo y estadísticamente significativo, mientras que la versión interpolante de segundo grado, basada en tres nodos, proporciona una representación más estable desde el punto de vista numérico y geométrico.

Por su parte, la trayectoria rectilínea se describe de manera natural mediante una parametrización lineal, que coincide conceptualmente con una interpolación de Lagrange de primer grado entre los puntos extremos.

Para evaluar el impacto de las trayectorias interpoladas en la precisión de las mediciones topográficas se trabajó sobre la trayectoria parabólica del dron a 80 m de altura, modelada mediante interpolación de Lagrange a partir de los nodos experimentales (x_i, y_i) del recorrido. La trayectoria rectilínea se utilizó únicamente como referencia conceptual, mientras que el análisis cuantitativo principal se centró en el modelo parabólico, por ser el que incorpora de forma explícita la variación geométrica del movimiento.

Preparación de datos e implementación de la interpolación

En una primera etapa, se preparó la base de datos de nodos de la trayectoria parabólica, estandarizando nombres de variables, convirtiendo las columnas x , y (z , si existía) a formato numérico y filtrando únicamente los registros identificados como “parabola”, ordenados por x . Este preprocesamiento garantizó la ausencia de duplicados en x , condición necesaria para la aplicación de la interpolación de Lagrange como función univaluada en dicha variable.

Sobre este conjunto de nodos se definió un polinomio interpolante de Lagrange de orden k , de la forma:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k y_i L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Asegurando que el polinomio pase exactamente por los nodos utilizados. Este esquema se empleó como núcleo del procedimiento de simulación con distintas configuraciones de nodos.

Métricas de precisión y esquema de simulación por configuraciones de nodos

El impacto de las trayectorias interpoladas en la precisión se cuantificó mediante métricas de error en validación cruzada sobre la propia trayectoria, evaluando la capacidad del modelo para predecir puntos no utilizados en el ajuste. Para cada configuración de nodos se calculó la raíz del error cuadrático medio (RMSE), error absoluto medio (MAE) y error máximo absoluto.

Para cada tamaño de muestra k (número de nodos seleccionados), se implementó un remuestreo intensivo: en cada iteración se elegía aleatoriamente un subconjunto de k nodos, se construía el polinomio interpolante $P_k(x)$, se evaluaba en los puntos no usados para el ajuste y se computaban RMSE, MAE y error máximo. Repitiendo este procedimiento B veces por cada k (por ejemplo, $B = 2000$), se obtuvo una distribución empírica del error asociada a cada configuración de nodos. Como referencia, se incluyó el caso $k = n$ (todos los nodos disponibles), en el cual el polinomio interpolante reproduce exactamente todos los puntos, produciendo error nulo por construcción.

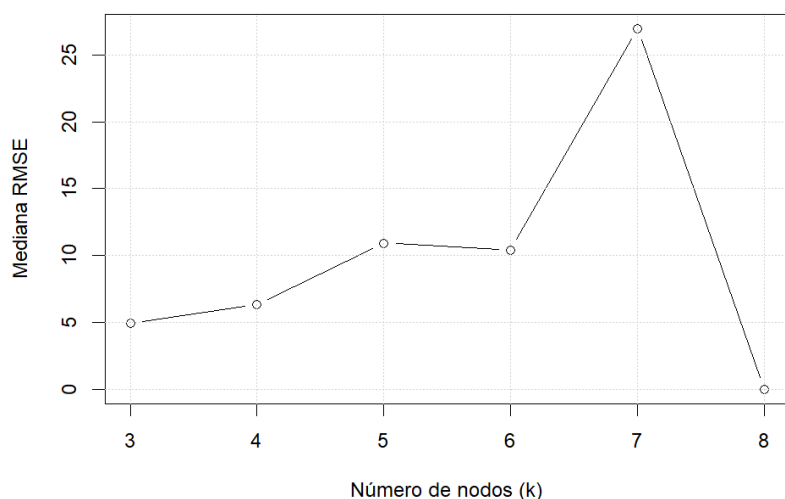
Resultados del análisis de sensibilidad frente al número de nodos

La Tabla 7 sintetiza los resultados del análisis de sensibilidad del modelo interpolante respecto al número de nodos utilizados, considerando como métrica principal el RMSE, junto con medidas de dispersión.

Tabla 7*Desempeño del modelo interpolante según número de nodos*

Número de nodos (k)	Polinomio	RMSE mediano	Dispersión (IQR)	Comportamiento cualitativo
3	Grado 2 (parabólico)	4,90	Baja	Modelo estable y suave
4 - 5	Grado 3-4	Mayor que k=3	Moderada-alta	Aumento de error, inicio de sobreajuste
6 - 7	Grado 5-6	Elevado	Alta	Polinomio inestable, fenómeno de Runge
8	Grado 7	0 (en nodos)	Muy alta fuera de nodos	Interpolación exacta sin capacidad predictiva

Los resultados muestran que la configuración $k = 3$, correspondiente a una interpolación parabólica de segundo grado, presenta el menor RMSE mediano y la menor dispersión, lo que indica un modelo preciso y numéricamente estable. A medida que aumenta el número de nodos, el error se incrementa y la variabilidad de la distribución de RMSE se amplía, evidenciando el inicio de un comportamiento de sobreajuste. La Figura 5 ilustra visualmente este comportamiento, mostrando un mínimo claro en $k=3$, seguido de un aumento progresivo del error y de la inestabilidad al incrementar el número de nodos.

Figura 5*Relación entre el número de nodos y la estabilidad del modelo interpolante*

Validación del modelo parabólico y efectos sobre la precisión topográfica

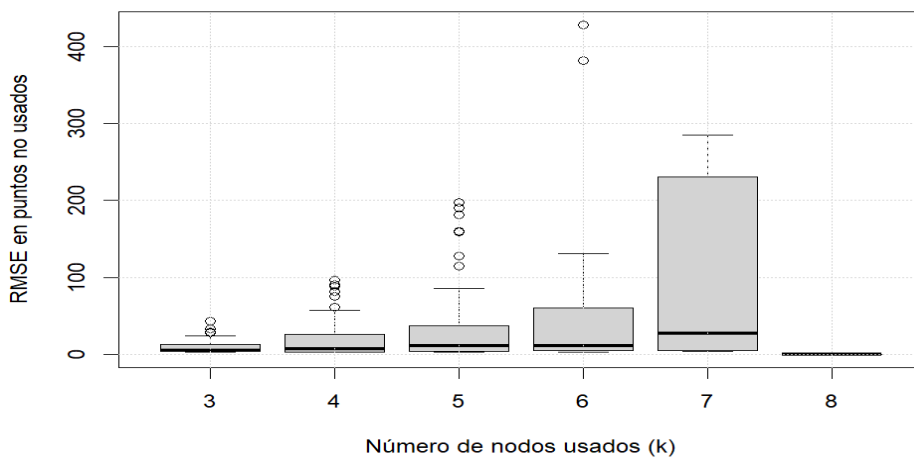
En coherencia con los resultados anteriores, la interpolación parabólica con tres nodos (inicio, punto de máxima altura y final) se adoptó como configuración óptima del modelo de trayectoria. Este modelo proporciona un equilibrio adecuado entre precisión (bajo RMSE y MAE), estabilidad numérica (baja variabilidad en los errores) y representatividad geométrica del recorrido real del dron.

Desde la perspectiva de la medición topográfica, el análisis del error absoluto y del error cuadrático medio mostró que las trayectorias interpoladas de bajo orden describen mejor el comportamiento del dron y producen estimaciones de área más consistentes frente a la referencia tradicional. En particular, la comparación con la trayectoria rectilínea evidenció que el modelo parabólico interpolado no solo reproduce de manera más realista el recorrido, sino que también reduce el error de cálculo del área, reforzando su idoneidad para aplicaciones fotogramétricas de precisión.

La Figura 6 muestra que: para $k=3$, el RMSE es bajo, estable y sin valores extremos relevantes; para $k=4$ y $k=5$, se produce un aumento del error y de la dispersión, acompañado de la aparición de valores atípicos, señalando el inicio del sobreajuste; para $k=6$ y $k=7$, el RMSE y la variabilidad se incrementan de forma marcada, con numerosos outliers que reflejan un comportamiento oscilatorio propio de polinomios de alto grado; para $k=8$, el error se anula solo por la interpolación exacta de todos los puntos, pero el modelo deja de ser fiable como herramienta predictiva.

Figura 6

Impacto de la configuración de nodos (Lagrange) en la precisión



4. Discusión

Los resultados de este estudio muestran que la precisión en el cálculo de áreas mediante fotogrametría con drones depende de manera conjunta e interrelacionada de la altura de vuelo, del tipo de trayectoria y de la configuración de nodos utilizada en la interpolación del recorrido. En particular, se identificó una altura intermedia de 80 m como nivel óptimo de operación, se evidenció un desempeño superior de las trayectorias parabólicas frente a las rectilíneas y se demostró que los modelos interpolantes de bajo grado (tres nodos, grado dos) ofrecen el mejor compromiso entre precisión métrica y estabilidad numérica. Estos hallazgos permiten discutir el problema no solo desde una perspectiva aplicada de la fotogrametría, sino también desde los fundamentos de la interpolación polinómica y la planificación de trayectorias en vehículos aéreos no tripulados (UAV).

Altura de vuelo y precisión fotogramétrica

La identificación de 80 m como la altura de vuelo con menor error medio y menor variabilidad en la estimación del área, en contraste con los errores mayores observados a 50 m y 120 m, confirma empíricamente que la relación entre altura de vuelo y precisión no es lineal. Este comportamiento es coherente con estudios previos en fotogrametría con UAV, los cuales han demostrado que la variación de la altura modifica simultáneamente la resolución espacial, la geometría de captura y la calidad del

ajuste fotogramétrico, de modo que una menor altura no garantiza necesariamente una mayor precisión global (Tan et al., 2024; Zhong et al., 2025).

Además, investigaciones recientes que analizan la influencia conjunta de la altura y otros parámetros de planificación, como el número de puntos de control o el solape longitudinal y transversal, han documentado que la exactitud puede degradarse progresivamente al aumentar la altura, pero también señalan que el diseño óptimo depende de un compromiso entre resolución, cobertura y estabilidad geométrica del bloque fotogramétrico (Elhadary et al., 2022; Rabiú & Ahmad, 2023).

En este contexto, el presente estudio aporta evidencia específica y cuantificable al mostrar que el error en la estimación del área alcanza un mínimo en una altura intermedia, resultado sustentado tanto en análisis estadísticos robustos como en la comparación directa con un valor de referencia obtenido mediante medición tradicional. A diferencia de gran parte de la literatura, centrada en errores de coordenadas o modelos digitales de elevación, este trabajo cuantifica explícitamente el error en el cálculo del área de una superficie plana, lo que permite traducir los resultados en criterios operativos claros para la planificación de vuelos orientados a cartografía de precisión.

Tipo de trayectoria y precisión en el cálculo del área

La comparación entre el recorrido lineal y el recorrido parabólico, manteniendo constante la altura de vuelo en 80 m, evidenció diferencias altamente significativas en el error del cálculo del área, con una reducción superior a un orden de magnitud a favor de la trayectoria parabólica. Este resultado indica que, incluso bajo condiciones de altura óptima, la geometría del trayecto del dron tiene un impacto determinante sobre la precisión de los productos topográficos, un aspecto que ha recibido menor atención que otros parámetros clásicos como el solape o la distribución de puntos de control.

Estudios recientes sobre planificación de trayectorias para UAV han propuesto el uso de trayectorias suaves basadas en polinomios o splines, con el objetivo de garantizar factibilidad dinámica, mejorar la eficiencia del vuelo y estabilizar la captura de datos (Farid et al., 2019; Yang et al., 2023). Los resultados obtenidos en este trabajo son consistentes con dicha línea de investigación, ya que demuestran que un recorrido parabólico, ajustado a partir de coordenadas reales y validado mediante mínimos cuadrados, no solo describe de manera más realista el movimiento del dron, sino que se traduce en una mejora sustantiva de la precisión en la estimación de áreas.

Configuración de nodos y estabilidad del modelo

Un aporte central de este estudio es el análisis sistemático del impacto del número de nodos en la interpolación de Lagrange sobre la precisión del modelo de trayectoria. Los resultados muestran que la interpolación con tres nodos (polinomio de segundo grado) presenta el menor RMSE y la menor variabilidad, mientras que el incremento del número de nodos conduce a un aumento progresivo del error y a una marcada inestabilidad numérica. Este comportamiento constituye una manifestación empírica del fenómeno de Runge, ampliamente documentado en la teoría de interpolación polinómica, donde se ha demostrado que los polinomios de alto grado con nodos aproximadamente equiespaciados pueden generar oscilaciones artificiales y pérdida de capacidad predictiva.

En contraste, la configuración parabólica de bajo orden, basada en nodos representativos del recorrido, ofrece un modelo geoméricamente coherente con el movimiento real del dron, con errores moderados y sin evidencias de oscilaciones espurias. Este resultado es consistente con recomendaciones actuales en planificación y control de trayectorias para UAV, que favorecen el uso de polinomios de bajo grado o esquemas segmentados para mejorar la estabilidad numérica y la robustez frente a

perturbaciones (Bouček et al., 2024; Li et al., 2023). Así, el estudio demuestra que, en el contexto de levantamientos topográficos, un modelo sencillo y bien condicionado puede resultar superior a interpolaciones de alto grado que, aunque exactas en los nodos, degradan la precisión global.

Desde una perspectiva aplicada, los resultados permiten formular recomendaciones concretas para la planificación de vuelos y el diseño de trayectorias en levantamientos topográficos con drones. En primer lugar, la identificación de una altura intermedia óptima, en la que el error de área es mínimo y la variabilidad se reduce, sugiere que las misiones fotogramétricas deberían planificarse buscando un equilibrio entre resolución, cobertura y estabilidad geométrica. En segundo lugar, la evidencia a favor de trayectorias suaves y físicamente realistas, como la parabólica, indica que la planificación de recorridos puede complementar de manera efectiva los criterios tradicionales de solape y control en tierra, mejorando la calidad final de los productos fotogramétricos.

Limitaciones y futuras líneas de investigación

Este estudio presenta limitaciones que deben considerarse al interpretar los resultados y que abren líneas claras de investigación futura. En primer lugar, el análisis se centró en una superficie predominantemente plana y en un conjunto específico de alturas de vuelo y parámetros instrumentales; por tanto, la generalización de la altura óptima identificada debe realizarse con cautela, requiriendo estudios adicionales en terrenos de mayor complejidad morfológica y con diferentes configuraciones de cámara y solape. En segundo lugar, aunque el trabajo incorpora análisis estadísticos robustos y simulaciones detalladas, no aborda explícitamente la influencia de factores ambientales como el viento, las condiciones de iluminación o la calibración de la cámara, los cuales han sido identificados como determinantes en la precisión de modelos 3D y ortomosaicos en investigaciones previas.

Futuras investigaciones podrían extender el enfoque propuesto a escenarios con variación de altura durante el vuelo, trayectorias más complejas y el uso de interpolación por tramos o splines, así como integrar criterios de optimización multiobjetivo que combinen precisión métrica, costo computacional y restricciones dinámicas del UAV. Asimismo, resultaría de interés analizar la interacción entre la configuración de nodos del modelo de trayectoria y la distribución de puntos de control en tierra, en consonancia con estudios que han evaluado el impacto de los GCP en la exactitud de productos fotogramétricos.

5. Conclusiones

Se demostró que la altura de vuelo de 80 m representa la configuración óptima para minimizar el error en el cálculo de áreas mediante fotogrametría con drones, evidenciando una relación no lineal entre Se demostró que una altura de vuelo intermedia de 80 m constituye la configuración óptima para minimizar el error en el cálculo de áreas mediante fotogrametría con drones, evidenciándose una relación no lineal entre la altura de vuelo y la precisión obtenida. En particular, los niveles extremos analizados (50 m y 120 m) generaron errores estadísticamente equivalentes entre sí, pero significativamente superiores al alcanzado en el nivel óptimo intermedio. Este resultado aporta un criterio cuantitativo y replicable para la planificación de misiones fotogramétricas, al superar el enfoque empírico de la medición directa y proporcionar un marco estadístico robusto para la validación de superficies planas.

Asimismo, se desarrolló y validó exitosamente un modelo computacional basado en interpolación de Lagrange y ajuste por mínimos cuadrados, capaz de representar con alta precisión las trayectorias parabólica y rectilínea del dron a una altura constante de 80 m. Los resultados confirmaron la clara

superioridad del modelo parabólico ajustado ($R^2 = 0.995$), así como la validez de su parametrización tridimensional, lo que habilita su uso en análisis cinemáticos y aplicaciones avanzadas de planificación de trayectorias. La formulación propuesta se consolida, por tanto, como una herramienta flexible y extensible para el diseño geométrico de recorridos en tareas de reconocimiento, mapeo y levantamientos topográficos de precisión.

Se comprobó que la interpolación de Lagrange con tres nodos (polinomio de segundo grado) optimiza el equilibrio entre precisión y estabilidad numérica en el modelado de la trayectoria parabólica, al evitar el fenómeno de Runge observado en configuraciones de mayor orden. Esta configuración logró el menor RMSE y una mayor robustez numérica, confirmando la efectividad del modelo propuesto frente a enfoques tradicionales. Al cuantificar de manera sistemática el impacto del número de nodos sobre la calidad de las mediciones topográficas, el estudio aporta una base metodológica sólida para la selección de modelos interpolantes en aplicaciones fotogramétricas con vehículos aéreos no tripulados.

Referencias

- Abid, M., El Kafhali, S., Amzil, A., & Hanini, M. (2025). Optimization of UAV Flight Paths in Multi-UAV Networks for Efficient Data Collection. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 50(10), 7207–7232. <https://doi.org/10.1007/s13369-024-09369-9>
- Bouček, Z., Flídr, M., & Straka, O. (2024). UAV Trajectory Planning with Path Processing. *2024 18th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, 422–427. <https://doi.org/10.1109/ICARCV63323.2024.10821663>
- Brent, J., Daniel, B., & Hussein, A. (2021). Examining the practicality and accuracy of Unmanned Aerial System Topographic Mapping (Drones) Compared to Traditional Topographic Mapping. *2021 International Conference on Electrical, Computer, Communications and Mechatronics Engineering (ICECCME)*, 1–7. <https://doi.org/10.1109/ICECCME52200.2021.9591036>
- Dilmaç, H., İlçi, V., Şaşmaz, N., & Tombuş, F. (2026). UAV flight path impacts on three-dimensional photogrammetric product accuracy. *Jeodezi ve Jeoinformasyon Dergisi*, 13(1), 33–48. <https://doi.org/10.9733/JGG.2026R0002.E>
- Elhadary, A., Rabah, M., Ghanim, E., Mohie, R., & Taha, A. (2022). The Influence of Flight Height and Overlap on UAV Imagery Over Featureless Surfaces. *Mansoura Engineering Journal*, 47(2), 34–42. <https://doi.org/10.21608/bfemu.2022.264943>
- Farid, G., Tahir, H., Karim, S., & Tahir, S. (2019). Waypoint-Based Generation of Guided and Optimal Trajectories for Autonomous Tracking Using a Quadrotor UAV. *Studies in Informatics and Control*, 27(2), 223–234. <https://doi.org/10.24846/v27i2y201810>
- Gimenez, F. (2018). *Interpolación mediante polinomios de Lagrange*. <https://riunet.upv.es/handle/10251/106060>
- Kang, X. (2025). Research on the Application of Total Stations and Drones in Urban Building Surveying. *Journal of Computer Technology and Electronic Research*, 2(5). <https://doi.org/10.70767/jcter.v2i5.658>

- Kumar, P., Pal, K., & Govil, M. (2025). Comprehensive Review of Path Planning Techniques for Unmanned Aerial Vehicles (UAVs). *ACM Comput. Surv.*, 58(3), 1-44. <https://doi.org/10.1145/3737280>
- Lemus-Romani, J., Rueda, E. J., Becerra-Rozas, M., Cabrera, C., Liu, J., & Astorga, G. (2025). Optimization of UAV Flight Parameters for Urban Photogrammetric Surveys: Balancing Orthomosaic Visual Quality and Operational Efficiency. *Drones*, 9(11). <https://doi.org/10.3390/drones9110753>
- Li, J., Xiong, Y., & She, J. (2023). UAV Path Planning for Target Coverage Task in Dynamic Environment. *IEEE Internet of Things Journal*, 10(20), 17734–17745. <https://doi.org/10.1109/JIOT.2023.3277850>
- Meng, W., Zhang, X., Zhou, L., Guo, H., & Hu, X. (2025). Advances in UAV Path Planning: A Comprehensive Review of Methods, Challenges, and Future Directions. *Drones*, 9(5). <https://doi.org/10.3390/drones9050376>
- Navas-Torres, O., & Borrás, C. (2024, octubre 22). *Modelado y seguimiento de trayectorias para dron hexacóptero: Evaluación comparativa de estrategias PID, LQG y PI-LQG* (Actas y comunicaciones de congresos). Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) / Universidad de Concepción – Chile. <https://hdl.handle.net/20.500.14468/26280>
- Poorvi, J., Kalita, A., & Gurusamy, M. (2025). Reliable and Efficient Data Collection in UAV-Based IoT Networks. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 28, 2531–2571. <https://doi.org/10.1109/COMST.2025.3550274>
- Rabiu, L., & Ahmad, A. (2023). Unmanned Aerial Vehicle Photogrammetric Products Accuracy Assessment: A Review. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, XLVIII-4-W6-2022, 279–288. <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLVIII-4-W6-2022-279-2023>
- Sheltami, T., Ahmed, G., Ghaleb, M., & Mahmoud, A. (2025). UAV Path Planning and Trajectory Optimization: A Comprehensive Survey. *Arabian Journal for Science and Engineering*. <https://doi.org/10.1007/s13369-025-10971-8>
- Tan, C., Chen, Z., Chen, Z., Liao, A., Zeng, X., & Cao, J. (2024). Accuracy analysis of UAV aerial photogrammetry based on RTK mode, flight altitude, and number of GCPs. *Measurement Science and Technology*, 35(10), 106310. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/ad5dd7>
- Trubia, S., Curto, S., Severino, A., Arena, F., & Puleo, L. (2021). The use of UAVs for civil engineering infrastructures. *AIP Conference Proceedings*, 2343(1), 110012. <https://doi.org/10.1063/5.0047880>
- Yang, Y., Xiong, X., & Yan, Y. (2023). UAV Formation Trajectory Planning Algorithms: A Review. *Drones*, 7(1), 62. <https://doi.org/10.3390/drones7010062>
- Zhong, H., Duan, Y., Tao, P., & Zhang, Z. (2025). Influence of ground control point reliability and distribution on UAV photogrammetric 3D mapping accuracy. *Geo-Spatial Information Science*, 28(5), 1998–2018. <https://doi.org/10.1080/10095020.2025.2451204>

Transparencia

Conflicto de interés

Los autores declaran que no existen conflictos de interés de naturaleza alguna como parte de la presente investigación.

Fuente de financiamiento

Los autores financiaron completamente la investigación.

Contribución de autoría

Dennis Gabriel Cuadrado Ayala: Conceptualización, metodología, software, validación, análisis formal, investigación, gestión de datos, visualización, redacción - preparación del borrador original, redacción - revisión y edición, financiamiento, administración del proyecto, recursos, supervisión.

Klever Hernán Torres Rodríguez: Conceptualización, validación, análisis formal, investigación, gestión de datos, redacción - preparación del borrador original, redacción - revisión y edición, financiamiento, recursos, supervisión.

Los autores contribuyeron activamente en el análisis de los resultados, revisión y aprobación del manuscrito final.