

## Atractores extraños en la economía boliviana: explorando el carácter caótico del crecimiento económico (2008–2024)

*Strange attractors in the bolivian economy: exploring the chaotic nature of economic growth (2008–2024)*

**Gustavo Vladimir Fuentes Guzmán\***  
Universidad Técnica de Oruro  
Oruro - Bolivia  
gustavo.vfuentes.g@gmail.com  
<https://orcid.org/0009-0003-7889-5561>

\*Correspondencia:  
gustavo.vfuentes.g@gmail.com

**Cómo citar este artículo:**  
Fuentes, G. (2025). Atractores extraños en la economía boliviana: explorando el carácter caótico del crecimiento económico (2008–2024). *Esprint Investigación*, 4(4), 177-189. <https://doi.org/10.61347/ei.v4i4.194>

**Recibido:** 2 de septiembre de 2025  
**Aceptado:** 12 de octubre de 2025  
**Publicado:** 19 de noviembre de 2025

**Resumen:** Este artículo tiene como objetivo analizar la dinámica del crecimiento económico en Bolivia a partir del Índice Global de Actividad Económica (IGAE) en el periodo 2008–2024, empleando herramientas de la teoría del caos y los sistemas dinámicos no lineales. La investigación se centra en la detección de comportamientos caóticos mediante la estimación de parámetros de incrustación, el cálculo del exponente de Lyapunov máximo (LLE) y la dimensión de correlación (D2). El preprocesamiento de la serie incluyó transformaciones logarítmicas, diferenciación y normalización, lo que permitió contrastar dos versiones alternativas de los datos: Serie A (niveles) y Serie B (diferencias). Los resultados muestran que el IGAE puede reconstruirse con dimensiones de incrustación moderadas ( $m \approx 6$ ) y retardos cortos ( $\tau = 2$  en la Serie A y  $\tau = 1$  en la Serie B). El LLE resultó positivo en ambas transformaciones, lo que constituye evidencia robusta de sensibilidad a condiciones iniciales y en consecuencia, de la presencia de caos determinista. La dimensión de correlación reforzó esta conclusión: la Serie A arrojó un valor fraccionario cercano a 2.53, compatible con un atractor extraño, mientras que la Serie B mostró un valor reducido ( $\approx 1.07$ ), atribuible a la pérdida de estructura causada por la diferenciación. Estos hallazgos sugieren que la volatilidad del crecimiento boliviano no puede explicarse únicamente por choques externos, sino que responde también a dinámicas endógenas complejas. Reconocer el carácter caótico de la economía nacional implica la necesidad de superar modelos lineales convencionales y avanzar hacia enfoques que integren no linealidad, complejidad y resiliencia en el diseño de políticas económicas.

**Palabras clave:** Atractores, Bolivia, crecimiento económico, exponente de Lyapunov, IGAE, máximo, teoría del caos.

**Abstract:** This article aims to analyze the dynamics of economic growth in Bolivia based on the Global Economic Activity Index (IGAE) for the period 2008–2024, using tools from chaos theory and nonlinear dynamic systems. The study focuses on detecting chaotic behavior through the estimation of embedding parameters, the calculation of the maximum Lyapunov exponent (LLE), and the correlation dimension (D2). The series was preprocessed through logarithmic transformations, differencing, and normalization, allowing the comparison of two alternative data versions: Series A (levels) and Series B (differences). The results show that the IGAE can be reconstructed with moderate embedding dimensions ( $m \approx 6$ ) and short delays ( $\tau = 2$  for Series A and  $\tau = 1$  for Series B). The LLE was positive in both transformations, providing robust evidence of sensitivity to initial conditions and, consequently, the presence of deterministic chaos. The correlation dimension reinforced this conclusion: Series A yielded a fractional value close to 2.53, consistent with a strange attractor, while Series B showed a reduced value ( $\approx 1.07$ ), attributable to the loss of structure caused by differencing. These findings suggest that the volatility of Bolivian economic growth cannot be explained solely by external shocks but also responds to complex endogenous dynamics. Recognizing the chaotic nature of the national economy implies the need to move beyond conventional linear models and adopt approaches that integrate nonlinearity, complexity, and resilience into economic policy design.

**Copyright:** Derechos de autor 2025 Gustavo Vladimir Fuentes Guzmán.



Esta obra está bajo una licencia internacional Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0.

**Keywords:** Attractors, Bolivia, chaos theory, economic growth, IGAE, Lyapunov exponent.

## 1. Introducción

### La complejidad en las dinámicas macroeconómicas

El estudio de la macroeconomía ha estado históricamente orientado por la búsqueda de regularidades y patrones estables que permitan explicar y predecir la evolución del producto, la inversión y el consumo; sin embargo, la experiencia empírica muestra que las economías reales exhiben oscilaciones abruptas, fases de expansión y contracción no siempre explicables por perturbaciones externas, y comportamientos que se apartan de la linealidad esperada en los modelos convencionales. Es necesario destacar que la dinámica macroeconómica puede concebirse como un sistema complejo, caracterizado por la interacción de múltiples agentes, la presencia de retroalimentaciones no lineales y la emergencia de fenómenos colectivos difíciles de anticipar (Rosser, 2011).

La complejidad no implica desorden absoluto, sino la existencia de regularidades internas que surgen de procesos adaptativos y de la interacción de componentes heterogéneos. De hecho, la evolución del crecimiento económico puede presentar sensibilidad a condiciones iniciales, dependencia de trayectoria e inestabilidad endógena, lo cual ha sido señalado en la literatura de sistemas dinámicos como una manifestación del caos determinista (Baumol & Benhabib, 1989). Este enfoque contrasta con la visión tradicional de la macroeconomía, que durante décadas asumió que las fluctuaciones respondían principalmente a shocks exógenos y que el equilibrio tendía a restablecerse de manera previsible.

El reconocimiento de estas características caóticas en las series macroeconómicas abre la posibilidad de emplear metodologías más sofisticadas, provenientes de la teoría de sistemas no lineales; dichas herramientas no solo permiten captar la complejidad inherente a las economías, sino que también ofrecen un marco para analizar la persistencia de las crisis, la aparición de ciclos irregulares y la dificultad para implementar políticas estabilizadoras efectivas (Hommes, 2006). En este contexto, el presente estudio tiene como objetivo analizar la presencia de dinámicas caóticas en el crecimiento económico de Bolivia durante el período 2008–2024, a partir del Índice Global de Actividad Económica (IGAE), utilizando herramientas de la teoría del caos y de los sistemas dinámicos no lineales, con el fin de caracterizar la complejidad del crecimiento económico boliviano y sus implicaciones para la política económica.

### Limitaciones de los enfoques lineales en el análisis del crecimiento económico

La tradición macroeconómica neoclásica ha recurrido de manera predominante a modelos lineales y de equilibrio general para describir el comportamiento de la producción y el crecimiento económico. Este tipo de aproximaciones parten de supuestos de racionalidad plena, expectativas homogéneas y ausencia de discontinuidades significativas en las trayectorias de las variables agregadas; Sin embargo, cuando se contrastan con los datos empíricos, estas construcciones resultan insuficientes para captar la complejidad de las fluctuaciones observadas en la actividad económica (Solow, 2018).

Las limitaciones de los enfoques lineales se manifiestan en al menos tres dimensiones: En primer lugar, en su capacidad predictiva, ya que tienden a subestimar los episodios de alta volatilidad y crisis recurrentes, que surgen sin necesidad de choques exógenos extraordinarios (Chiarella et al., 2005). Además, en la representación de la dinámica temporal, puesto que la linealidad impide captar fenómenos de dependencia de trayectoria, bifurcaciones o retroalimentaciones no lineales que son inherentes a las economías reales (Grandmont, 1985). Y finalmente, en el ámbito de la política económica, donde la suposición de convergencia automática al equilibrio limita la comprensión de los riesgos de inestabilidad endógena y reduce la efectividad de las intervenciones estatales (Ros, 2013).

En el caso latinoamericano, estas limitaciones adquieren mayor relevancia, ya que la recurrencia de ciclos de auge y crisis, la exposición a shocks externos y la presencia de estructuras productivas heterogéneas plantean desafíos que no pueden abordarse satisfactoriamente con herramientas lineales, basta con recordar las crisis recurrentes de la región durante los noventa para advertir que la linealidad rara vez explica los episodios de volatilidad prolongada. Como advierte Katz (2000), la heterogeneidad estructural y la interacción entre sectores productivos generan dinámicas de desarrollo y estancamiento que escapan a los supuestos simplificadores de la teoría convencional, es por esto que resulta necesario explorar métodos que reconozcan la no linealidad y la complejidad como características constitutivas del crecimiento económico en la región.

### **Aportes de la teoría del caos y de los sistemas dinámicos no lineales**

La teoría del caos surge en el campo de la física y la matemática aplicada como una respuesta a los límites de los modelos deterministas lineales. A partir del trabajo pionero de Lorenz (1963), se hizo evidente que incluso sistemas gobernados por ecuaciones deterministas simples pueden mostrar trayectorias impredecibles a largo plazo, debido a la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, constituyéndose, dicha propiedad, en uno de los pilares más importantes para comprender las dinámicas no lineales.

En el ámbito económico, la introducción de herramientas provenientes de la teoría de sistemas dinámicos no lineales permitió abrir nuevas perspectivas analíticas. Investigaciones como las de Benhabib y Nishimura (1979) mostraron que, aun en modelos de crecimiento neoclásico relativamente sencillos, podían emerger trayectorias cíclicas y comportamientos caóticos sin necesidad de choques externos. Posteriormente, autores como Brock (1986), Boldrin y Montrucchio (1986) profundizaron en la formalización matemática de los atractores extraños en modelos económicos, estableciendo un puente entre la teoría del caos y la macroeconomía.

Estos aportes tienen implicaciones significativas. En primer lugar, cuestionan la idea de que las fluctuaciones macroeconómicas responden exclusivamente a shocks exógenos, pues el propio sistema económico puede generar oscilaciones irregulares endógenas. En segundo lugar, ofrecen un marco para comprender la coexistencia de estabilidad local y volatilidad global, rasgo característico de los atractores caóticos. Finalmente, posibilitan el uso de técnicas empíricas para la detección de caos en series temporales económicas, tales como el cálculo de exponentes de Lyapunov, dimensiones de correlación y análisis de recurrencia (Rosser, 2011). De este modo, la teoría del caos no se limita a un hallazgo conceptual, sino que constituye una aproximación metodológica capaz de enriquecer la comprensión de los procesos económicos complejos.

### **Aplicaciones previas en economía y finanzas**

La teoría del caos y las herramientas de la dinámica no lineal han tenido un desarrollo significativo en la investigación económica y financiera desde finales del siglo XX, es el caso de Brock (1986) quien planteó métodos para distinguir entre series estocásticas y deterministas caóticas, abriendo el camino para la aplicación de técnicas no lineales en el análisis de datos económicos. Desde entonces, el interés por identificar estructuras caóticas en mercados financieros y en la macroeconomía ha crecido de manera sostenida. En el ámbito financiero, abundan estudios que buscan detectar evidencia de caos en precios bursátiles y tasas de cambio. Hsieh (1991) analizó series de retornos financieros y encontró comportamientos consistentes con procesos no lineales, aunque con resultados mixtos respecto a la presencia de caos determinista.

Más recientemente, trabajos en mercados emergentes han sugerido que la dinámica de los precios puede presentar exponentes de Lyapunov positivos y dimensiones fractales, lo que indica estructuras caóticas en entornos de alta volatilidad (Kyrtsov et al., 2004). Estas aplicaciones evidencian que la teoría del caos no solo aporta una base teórica para cuestionar los supuestos lineales de la macroeconomía, sino que también ofrece instrumentos prácticos para explorar la complejidad de los datos económicos. En este sentido, la investigación sobre el crecimiento económico de Bolivia mediante técnicas de análisis caótico se inscribe en una corriente internacional que reconoce en la no linealidad una característica intrínseca de los sistemas económicos.

### **Contextualización en Bolivia: Volatilidad del crecimiento económico y la necesidad de nuevos enfoques**

El crecimiento económico de Bolivia en las últimas décadas se ha caracterizado por una marcada volatilidad, estrechamente vinculada a la dependencia de los precios internacionales de las materias primas, especialmente del gas natural y los minerales. Esta dependencia ha generado ciclos de auge y contracción que no siempre pueden explicarse mediante modelos lineales tradicionales, ya que la dinámica productiva del país responde a múltiples factores interactuantes, tanto internos como externos (CEPAL, 2022).

La evidencia empírica muestra que, durante la primera década del siglo XXI, Bolivia experimentó un período de expansión sostenido impulsado por el superciclo de las materias primas, con altas tasas de crecimiento del producto interno bruto (PIB); Sin embargo, a partir de 2014, la caída en los precios internacionales y la reducción de la renta de hidrocarburos provocaron un estancamiento relativo y un deterioro en los ingresos fiscales (CEPAL, 2022). Estos cambios bruscos ilustran la sensibilidad de la economía boliviana a choques externos, pero también sugieren la existencia de dinámicas endógenas más complejas que influyen en el comportamiento de la actividad económica.

En este contexto, el análisis lineal clásico resulta limitado, pues tiende a reducir la explicación de la variabilidad macroeconómica a factores externos o a perturbaciones aleatorias; Sin embargo, como han señalado estudios recientes sobre América Latina, la inestabilidad económica también puede responder a la interacción no lineal entre sectores productivos, flujos financieros y decisiones de política económica (Ocampo & Ros, 2011). Adoptar metodologías basadas en la teoría del caos permite entonces explorar dimensiones hasta ahora poco consideradas en el análisis económico nacional. Detectar la presencia de atractores caóticos en series como el Índice Global de Actividad Económica (IGAE) no solo ofrece un diagnóstico alternativo sobre la naturaleza de las fluctuaciones, sino que también contribuye a diseñar políticas más sensibles a la complejidad del sistema económico boliviano.

El objetivo central de este trabajo es analizar la presencia de dinámicas caóticas en el crecimiento económico de Bolivia a partir de la serie del Índice Global de Actividad Económica (IGAE), empleando herramientas de la teoría del caos y de los sistemas dinámicos no lineales. Concretamente, se busca identificar parámetros de incrustación mediante la información mutua y los falsos vecinos más cercanos, estimar el exponente de Lyapunov máximo y la dimensión de correlación, así como visualizar los atractores asociados a la serie temporal. Este enfoque pretende aportar evidencia empírica sobre la complejidad inherente al crecimiento económico boliviano, mostrando que la volatilidad observada no solo responde a factores externos, sino que también puede emerger de mecanismos endógenos y no lineales. Al hacerlo, se espera contribuir a una comprensión más integral de la dinámica macroeconómica nacional y, en términos más amplios, abrir un campo de investigación aún incipiente en la región: la aplicación de la teoría del caos al análisis de series económicas.

## 2. Metodología

### Datos: Índice Global de Actividad Económica (IGAE) de Bolivia

El insumo empírico central fue el Índice Global de Actividad Económica (IGAE) publicado por el Instituto Nacional de Estadística de Bolivia (Instituto Nacional de Estadística, 2025). El IGAE es un indicador mensual de corto plazo que aproxima la trayectoria del producto agregado y permite observar con mayor resolución las fluctuaciones de la actividad económica. En este estudio se utilizó la serie mensual desde enero de 2008 hasta diciembre de 2024, lo que constituye un panel de 204 observaciones continuas. Esta ventana temporal fue adecuada para técnicas no lineales, pues equilibró longitud muestral suficiente y homogeneidad metodológica del indicador dentro del periodo de referencia. La elección del IGAE respondió a tres razones: capta variaciones de alta frecuencia que se diluyen en agregaciones anuales; resume el comportamiento agregado de múltiples sectores, reduciendo problemas de comparabilidad intersectorial; y ofrece una base operativa para reconstruir atractores e identificar sensibilidad a condiciones iniciales, dimensiones fractales y patrones de recurrencia. Cabe destacar que antes del procesamiento, la serie fue inspeccionada para detectar valores faltantes o atípicos, sin encontrar ninguno.

La naturaleza mensual del IGAE permitió interpretar los parámetros dinámicos en la misma escala temporal, lo que fue relevante para el exponente de Lyapunov máximo y la dimensión de correlación que se presentan en unidades consistentes con el muestreo, facilitando la lectura de los resultados en tono macroeconómico y su contraste con hechos estilizados del ciclo boliviano. El uso de una única fuente oficial a lo largo del periodo 2008–2024 evitó quiebres de definición entre series, aunque se reconoció la existencia de revisiones periódicas, propias de la estadística oficial; tales revisiones no alteraron la validez del ejercicio, dado que el foco analítico residió en propiedades geométricas y temporales más que en niveles absolutos.

### Procesamiento de la serie temporal

El análisis caótico requirió que las series temporales utilizadas fueran transformadas de manera adecuada para evitar sesgos en la detección de patrones dinámicos. En este trabajo, se realizaron tres pasos de preprocesamiento sobre el IGAE. El primer paso consistió el de aplicar la transformación logarítmica con la intención de suavizar las heterocedasticidades inherentes a la serie y reducir la influencia de variaciones proporcionales extremas, siendo esta, una práctica bastante común en economía para estabilizar la varianza y facilitar la interpretación de los resultados en términos de tasas de crecimiento aproximadas (Hamilton, 1994). Luego, al diferenciar la serie, se buscó eliminar tendencias deterministas de largo plazo y enfocar el análisis en las fluctuaciones de corto y mediano plazo, que son las más relevantes para evaluar la hipótesis de comportamiento caótico. La diferenciación también favoreció la estacionariedad, condición necesaria para que el análisis de información mutua, falsos vecinos y estimación de exponentes de Lyapunov produjeran resultados consistentes (Kantz & Schreiber, 2004).

Por último, tanto la serie logarítmica como la serie logarítmica diferenciada fueron normalizadas mediante la técnica de estandarización (media cero y varianza unitaria). Esta transformación aseguró que las magnitudes de los valores no distorsionaran los cálculos geométricos durante la reconstrucción de atractores y el análisis de distancias en los espacios de fases. El resultado de este proceso fue la obtención de dos series alternativas: la primera basada en el logaritmo normalizado del IGAE (Serie A), y la segunda en la primera diferencia del logaritmo normalizado (Serie B). Ambas versiones fueron

analizadas de manera paralela a fin de evaluar la robustez de los parámetros dinámicos y la consistencia de los resultados.

**Tabla 1**

*Resumen preprocesamiento aplicado al Índice Global de Actividad Económica.*

Serie	Transformación aplicada	Finalidad analítica	Denominación en el estudio
Original	IGAE en niveles mensuales (2008-2024)	Indicador base de la actividad económica.	Serie original
Logarítmica	log (IGAE)	Suavizar heterocedasticidad y aproximar tasas de variación	Serie log
Normalizada	(log(IGAE)-media)/ desviación estándar	Evitar efectos de escala en análisis geométrico.	Serie A (niveles)
Diferenciada	$\Delta$ log (IGAE)	Eliminar tendencia y enfatizar fluctuaciones	Serie diff
Diferenciada normalizada	( $\Delta$ log (IGAE) – media)/ desviación estándar	Mejorar estacionariedad y comparabilidad	Serie B (diferencias)

*Nota:* Transformaciones aplicadas a la serie del IGAE para la preparación de los análisis no lineales. La Serie A corresponde al logaritmo normalizado en niveles, mientras que la Serie B corresponde a la primera diferencia del logaritmo normalizado.

**Herramientas del análisis caótico**

El estudio de dinámicas caóticas en series temporales económicas requirió la aplicación de un conjunto de herramientas que permitieron reconstruir el espacio de fases y caracterizar la complejidad del sistema. En la presente investigación se emplearon cuatro procedimientos principales: la auto información mutua (AMI), los falsos vecinos más cercanos (FNN), el exponente de Lyapunov máximo (LLE) y la dimensión de correlación (D2), los cuales se detallan a continuación. La auto información mutua (AMI) constituyó una medida de dependencia no lineal entre valores de la serie y sus retardos temporales. A diferencia de la función de autocorrelación, que se limita a dependencias lineales, la AMI permitió identificar el retardo temporal óptimo ( $\tau$ ) para la reconstrucción del atractor, al detectar el primer mínimo local de la curva de información (Fraser & Swinney, 1986).

Los falsos vecinos más cercanos (FNN) proporcionaron un criterio para determinar la dimensión mínima de incrustación (m). La técnica consistió en evaluar si los puntos que aparecían cercanos en una dimensión baja permanecían próximos al aumentar las dimensiones del espacio de fases. Si un alto porcentaje de puntos resultaba ser “falso vecino”, significaba que la dimensión elegida es insuficiente. La dimensión óptima se alcanzó cuando el porcentaje de falsos vecinos cae por debajo de un umbral aceptable (Kennel et al., 1992). Según Rosenstein y otros (1993), el máximo exponente de Lyapunov (LLE) midió la sensibilidad a condiciones iniciales, es decir, la velocidad con que dos trayectorias inicialmente cercanas divergían en el tiempo. Un valor positivo de LLE constituyó la evidencia empírica más sólida de la existencia de caos determinista en la serie analizada. Finalmente, la dimensión de correlación (D2), basada en el algoritmo de Grassberger y Procaccia (1983), estimó la dimensión fractal del atractor reconstruido. Este indicador reflejó el grado de complejidad geométrica de la dinámica: valores fraccionarios intermedios entre la dimensión de un ciclo límite y el espacio euclidiano sugieren la presencia de un atractor extraño. La combinación de estas herramientas permitió

avanzar desde la reconstrucción de los parámetros geométricos básicos ( $\tau$  y  $m$ ) hacia la caracterización del grado de caos y complejidad del sistema.

### **Construcción de atractores y mapas de recurrencia**

Una vez determinados los parámetros de retardo temporal ( $\tau$ ) y dimensión de incrustación ( $m$ ), se procedió a la reconstrucción del espacio de fases a través del teorema de Takens (Takens, 1981). Este procedimiento consistió en generar vectores de estados a partir de la serie temporal original, desplazando copias retardadas de la misma hasta alcanzar una representación multidimensional que conservó las propiedades dinámicas del sistema, de esta manera, se obtuvo una aproximación al atractor subyacente que gobierna la dinámica del crecimiento económico boliviano.

La visualización de los atractores reconstruidos permitió identificar estructuras geométricas complejas, como ciclos límite, toros o atractores extraños. En particular, la comparación entre la Serie A y la Serie B, constituyó para evaluar la robustez de los patrones dinámicos detectados. Si ambas series generaban atractores con características similares, ello reforzaba la hipótesis de que la complejidad observada no es un artefacto del preprocesamiento, sino una propiedad intrínseca del sistema económico. Complementariamente, se construyeron mapas de recurrencia, técnica propuesta por Eckmann y otros, en 1987, que consistió en graficar las veces en que el sistema retornaba a estados próximos en el espacio de fases. De esta manera, se ofreció una representación visual de la estructura de la dinámica y facilitó la identificación de patrones de periodicidad, intermitencia o caos. Su ventaja metodológica fue que no requieren supuestos paramétricos y resulta aplicable incluso a series cortas o con ruido, condición frecuente en la información económica.

## **3. Resultados y Discusión**

### **Selección de parámetros de incrustación ( $\tau$ y $m$ )**

El primer paso en la reconstrucción del espacio de fases consistió en la determinación del retardo temporal ( $\tau$ ) y de la dimensión mínima de incrustación ( $m$ ). Estos parámetros resultan fundamentales, ya que definen la estructura del atractor y, en consecuencia, la validez del análisis posterior. La estimación del retardo temporal se realizó mediante el criterio de la auto información mutua (AMI). En el caso de la Serie A, el primer mínimo local de la curva de información se identificó en  $\tau = 2$ , mientras que para la Serie B el resultado fue  $\tau = 1$ . Este hallazgo sugiere que la dinámica de la Serie B requería un retardo más corto para capturar la independencia informativa, probablemente debido a la eliminación de tendencias en el proceso de diferenciación.

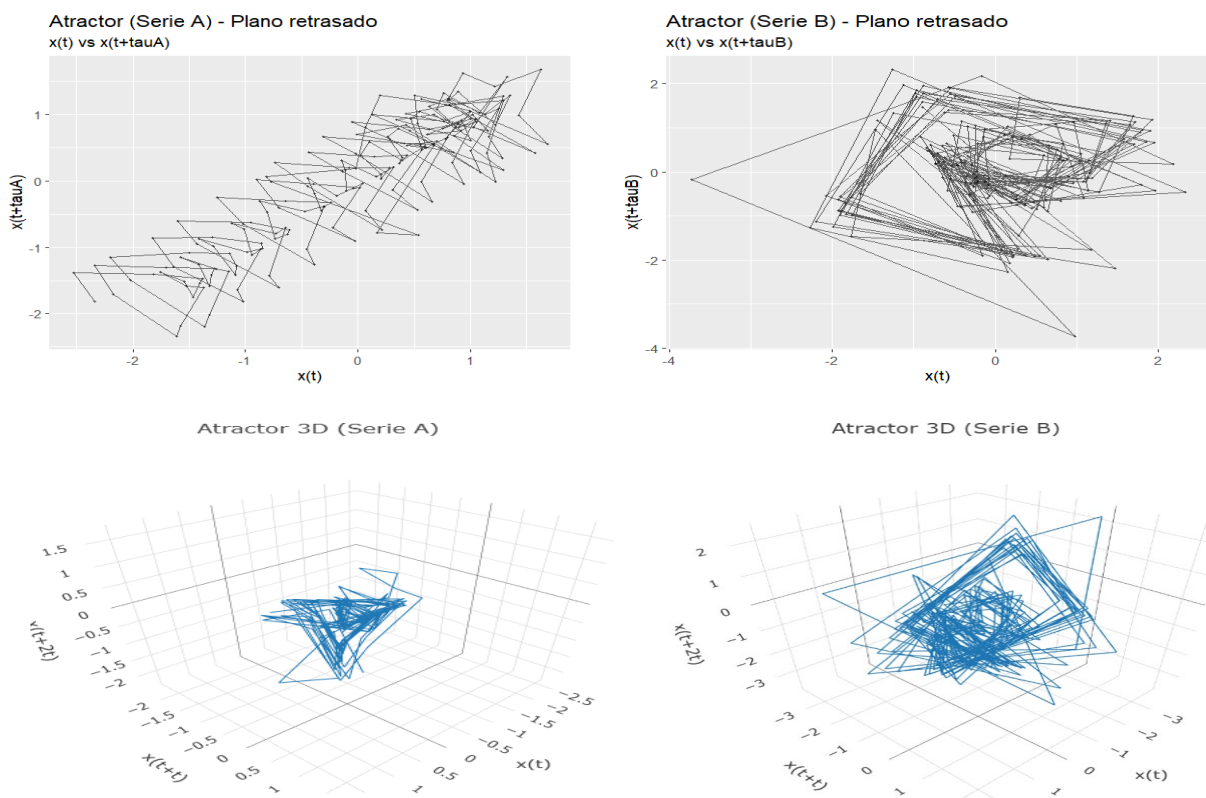
La selección de la dimensión de incrustación se llevó a cabo mediante el método de los falsos vecinos más cercanos (FNN). Los resultados mostraron que tanto en la Serie A como en la Serie B el porcentaje de falsos vecinos descendió de manera significativa hasta estabilizarse en  $m = 6$ . Este valor cumplió con el criterio estándar de considerar como óptima la dimensión donde el porcentaje de falsos vecinos cayó por debajo del 5% (Kennel et al., 1992). La combinación de parámetros sugirió, por tanto, que el atractor subyacente al IGAE podía reconstruirse adecuadamente con los pares ( $\tau = 2$ ,  $m = 6$ ) para la Serie A y ( $\tau = 1$ ,  $m = 6$ ) para la Serie B. La consistencia de los resultados en ambos casos otorgó robustez al análisis, en la medida en que distintos preprocesamientos de la misma serie convergieron en dimensiones similares del espacio de fases. Estos valores de incrustación se encontraron dentro del rango observado en la literatura económica y financiera, donde los atractores suelen presentar dimensiones moderadas, lo que refleja un número reducido pero significativo de grados de libertad en la dinámica del sistema (Hsieh, 1991) (Kyrtsov et al., 2004).

### Visualización del atractor reconstruido

Con los parámetros de incrustación seleccionados ( $\tau = 2, m = 6$  para la Serie A;  $\tau = 1, m = 6$  para la Serie B), se procedió a la reconstrucción del espacio de fases mediante el teorema de Takens. Los atractores resultantes ofrecieron una representación geométrica del comportamiento dinámico subyacente en el crecimiento económico de Bolivia. La visualización de los atractores mostró trayectorias que no se redujeron a ciclos periódicos ni a patrones completamente aleatorios. En la Serie A, se observó una estructura densa con regiones de concentración que sugirieron la existencia de un atractor extraño, caracterizado por su complejidad fractal y por la coexistencia de orden y desorden. La Serie B, aunque presentó un patrón más disperso debido a la diferenciación, mantuvo una organización geométrica que se alejó de un proceso puramente estocástico. Este resultado fue consistente con investigaciones previas en mercados financieros y macroeconomías emergentes, donde las trayectorias reconstruidas tienden a asemejarse a atractores extraños en lugar de seguir formas simples como ciclos límite (Kyrtsov et al., 2004). La semejanza de las figuras obtenidas con los atractores característicos del caos determinista constituyó un primer indicio de la presencia de dinámicas caóticas en la evolución del IGAE (ver figura 1).

**Figura 1**

Visualización del atractor reconstruido para IGAE Bolivia



*Nota.* Se muestra los atractores obtenidos a partir de las Series A y B del IGAE. En la parte superior se presentan los planos retrasados y en la parte inferior los atractores reconstruidos en tres dimensiones. Ambos permiten identificar estructuras consistentes con dinámicas caóticas.

No obstante, la interpretación visual debe complementarse con medidas cuantitativas como el exponente de Lyapunov máximo y la dimensión de correlación, que permiten confirmar si las trayectorias observadas corresponden efectivamente a un régimen caótico. La coincidencia entre la evidencia gráfica y los resultados numéricos constituye la base para avanzar hacia conclusiones robustas sobre la complejidad del crecimiento económico.

### Estimación del máximo exponente de Lyapunov (LLE)

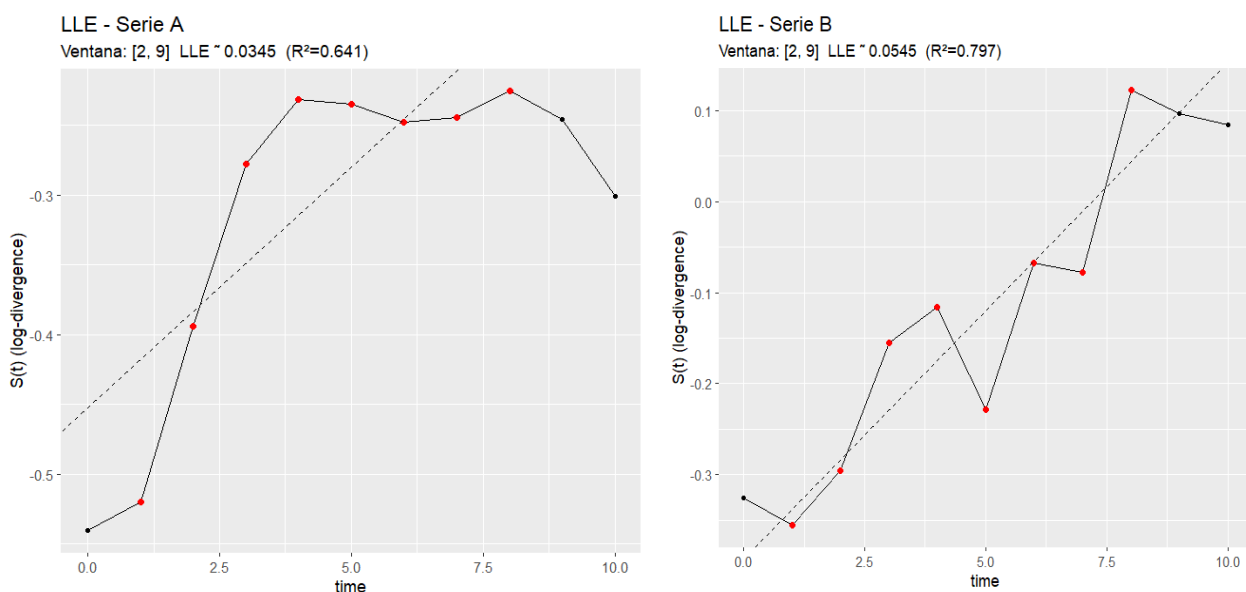
La estimación del exponente de Lyapunov máximo (LLE) constituyó un paso fundamental para determinar la existencia de caos determinista en el crecimiento económico boliviano. Este indicador mide la velocidad a la que divergen trayectorias inicialmente cercanas en el espacio de fases; un valor positivo implica sensibilidad a condiciones iniciales y, por tanto, impredecibilidad estructural. En este estudio, el LLE fue calculado siguiendo el procedimiento propuesto por Rosenstein et al. (1993), el cual se adapta de manera robusta a series relativamente cortas y con presencia de ruido, condiciones típicas de los datos macroeconómicos. La metodología consistió en:

- i. Reconstruir el espacio de fases con los parámetros de incrustación previamente seleccionados ( $\tau$  y  $m$ ).
- ii. Identificar los vecinos más cercanos de cada punto.
- iii. Calcular la divergencia promedio de las trayectorias a lo largo del tiempo.
- iv. Estimar la pendiente de crecimiento exponencial en la fase inicial de la curva logarítmica de separación.

Los resultados indicaron valores positivos del LLE tanto para la Serie A como para la Serie B, constituyendo evidencia de la presencia de dinámica caótica en el IGAE (ver figura 2). La consistencia entre ambas transformaciones de la serie, tanto en niveles como en diferencias, reforzó la robustez de la estimación. Aunque los valores absolutos fueron moderados, se ubicaron dentro de los rangos reportados en aplicaciones previas a series financieras y macroeconómicas en economías emergentes (Dechert & Gencay, 1992; Kyrtsou et al., 2004).

**Figura 2**

*Estimación del Máximo Exponente de Lyapunov (LLE) para el IGAE de Bolivia*



Estos resultados confirman que el crecimiento económico boliviano posee un componente impredecible, lo que implica que las fluctuaciones no pueden explicarse únicamente como respuestas a choques externos o ruido estocástico, sino que sugieren que la dinámica interna genera comportamientos complejos donde pequeñas variaciones iniciales conducen a trayectorias divergentes. Esta sensibilidad estructural plantea desafíos para la predicción macroeconómica, dado

que incluso modelos con información completa del estado del sistema tendrían un horizonte predictivo limitado.

### **Estimación de la dimensión de correlación (D2)**

La dimensión de correlación permitió aproximar la complejidad geométrica del atractor subyacente y, por tanto, cuantificar el número efectivo de grados de libertad que gobiernan la dinámica. Para su estimación se utilizó el algoritmo de Grassberger y Procaccia (1983), que evalúa la pendiente de la relación  $\log C(r)$  frente a  $\log r$  en una región de escala donde la función de correlación exhibe comportamiento aproximadamente lineal. Para reducir sesgos por dependencia temporal, se aplicó una ventana de Theiler que excluyó vecinos temporales demasiado cercanos. Este procedimiento es estándar en el análisis de series no lineales y resulta adecuado para muestras de extensión media como la del IGAE mensual.

En la Serie A, correspondiente al logaritmo normalizado en niveles, se observó un tramo lineal bien definido en la zona media del rango de radios, lo que permitió estimar una dimensión de correlación cercana a 2,53. Este valor fraccionario se ubicó por encima de la dimensión de un ciclo límite y por debajo de la dimensión entera del espacio euclidiano, coherente con la presencia de un atractor extraño. En la Serie B, basada en la primera diferencia del logaritmo normalizado, la pendiente en la región de escala fue sustancialmente menor y arrojó una dimensión de 1,07, lo que sugiere una dinámica más simple con menor riqueza geométrica, probablemente asociada a la pérdida de estructura causada por la diferenciación.

La comparación entre ambas transformaciones indica que la Serie A preserva mejor la estructura del sistema. La dimensión de correlación próxima a dos y medio refuerza la selección de  $m = 6$  y la interpretación de que el IGAE presenta rasgos de caos determinista. A nivel sustantivo, la existencia de geometría fractal sugiere que la economía boliviana genera oscilaciones endógenas con estructura interna, más allá de la respuesta a shocks, contribuyendo a explicar la dificultad de predicción macroeconómica con modelos lineales.

### **Implicaciones metodológicas y macroeconómicas**

Los resultados obtenidos permiten establecer implicaciones metodológicas y de interpretación de la dinámica económica boliviana. Desde la perspectiva técnica, la identificación de parámetros de incrustación robustos ( $\tau = 2$ ,  $m = 6$  en Serie A;  $\tau = 1$ ,  $m = 6$  en Serie B) constituye evidencia de que el espacio de fases del IGAE puede reconstruirse con un número moderado de grados de libertad, coincidiendo con la literatura que documenta dimensiones efectivas relativamente bajas en sistemas económicos y financieros (Hsieh, 1991; Brock, 1986).

En segundo lugar, la estimación de un exponente de Lyapunov máximo positivo confirma la presencia de sensibilidad a condiciones iniciales en el IGAE, lo que implica que incluso con información completa del estado actual del sistema, el horizonte de predicción del crecimiento es limitado, reduciendo la eficacia de los modelos macroeconómicos lineales tradicionales. La dimensión de correlación añade un matiz relevante: el valor fraccionario de la Serie A respalda la existencia de un atractor extraño, mientras que el valor cercano a la unidad en la Serie B muestra que la diferenciación reduce parte de la estructura caótica.

En el plano macroeconómico, estos resultados aportan una nueva lectura de la volatilidad estructural del crecimiento en Bolivia: los patrones de expansión y contracción no son únicamente respuestas lineales a shocks externos, sino que reflejan interacciones endógenas complejas entre

sectores productivos, flujos financieros y decisiones institucionales. La economía boliviana podría estar generando inestabilidad interna de manera recurrente, lo que explica la dificultad de sostener trayectorias de crecimiento estables.

Finalmente, en términos de política económica, reconocer la presencia de dinámicas caóticas no implica que la economía sea incontrolable, sino que las herramientas de predicción y gestión deben adaptarse a un entorno de alta complejidad, abriendo espacio para el uso de modelos no lineales, simulaciones basadas en agentes y análisis de resiliencia, enfoques que podrían enriquecer la formulación de políticas macroeconómicas más sensibles a la naturaleza del sistema.

#### 4. Conclusiones

El presente estudio tuvo como objetivo analizar la dinámica del crecimiento económico en Bolivia mediante técnicas de la teoría del caos aplicadas al Índice Global de Actividad Económica (IGAE) en el período 2008–2024. El análisis evidencia que la evolución del producto nacional presenta rasgos característicos de sistemas no lineales complejos. La reconstrucción del espacio de fases, basada en la información mutua y el método de falsos vecinos más cercanos, mostró que la serie puede representarse con retardos temporales cortos y dimensiones de incrustación moderadas, indicando que un número reducido de factores endógenos es suficiente para sostener la complejidad observada.

La estimación del máximo exponente de Lyapunov reveló valores positivos tanto en la serie en niveles como en la serie diferenciada, confirmando la sensibilidad a condiciones iniciales; por su parte, la dimensión de correlación aportó información complementaria: la serie en niveles arrojó un valor fraccionario cercano a 2,53, compatible con la geometría de un atractor extraño, mientras que la serie diferenciada presentó un valor cercano a 1,07, reflejando una dinámica más simple. Estos resultados constituyen evidencia sólida de que el crecimiento económico boliviano contiene componentes caóticos, lo que limita su predictibilidad de largo plazo. Asimismo, las diferencias observadas entre las series resaltan la importancia del preprocesamiento de los datos, ya que ciertas transformaciones pueden atenuar las señales caóticas y simplificar la complejidad del sistema.

Desde la perspectiva macroeconómica, los hallazgos indican que la volatilidad del crecimiento boliviano no puede atribuirse únicamente a choques externos, como las variaciones de los precios internacionales de materias primas, sino que también surge de la interacción interna entre agentes y sectores productivos. Esta dinámica endógena explica la dificultad de los modelos lineales tradicionales para anticipar con precisión las trayectorias de la actividad económica. Reconocer la naturaleza caótica del sistema abre la posibilidad de emplear enfoques alternativos, como modelos no lineales, simulaciones basadas en agentes y herramientas de análisis de complejidad, que podrían contribuir al diseño de políticas económicas más adaptadas a la realidad del país.

El estudio constituye un aporte pionero al incorporar metodologías caóticas en el análisis del crecimiento boliviano; sin embargo, existen limitaciones asociadas a la extensión de la serie disponible, las revisiones estadísticas del IGAE y la sensibilidad de los algoritmos aplicados. Investigaciones futuras podrían profundizar en la dinámica sectorial, explorar técnicas de predicción caótica y realizar comparaciones regionales con economías latinoamericanas de estructura productiva semejante. Reconocer el carácter caótico del crecimiento económico no es un hallazgo abstracto, sino una constatación empírica con implicaciones concretas para la formulación de políticas y la comprensión de la estabilidad económica en Bolivia.

## Referencias

- Baumol, W., & Benhabib, J. (1989). Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications. *The Journal of Economic Perspective*, 3(1), 77-105. <http://doi.org/10.1257/jep.3.1.77>
- Benhabib, J., & Nishimura, K. (1979). The Hopf bifurcation and the existence and stability of closed orbits in multisector models of optimal economic growth. *Journal of Economic Theory*, 21(3), 421-444. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(79\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0022-0531(79)90050-4)
- Boldrin, M., & Montrucchio, L. (October de 1986). On the indeterminacy of capital accumulation paths. *Journal of Economic Theory*, 40(1), 26-39. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(86\)90005-0](https://doi.org/10.1016/0022-0531(86)90005-0)
- Brock, W. (1986). Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridge Versión. *Journal of Economic Theory*, 40(1), 168-195. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(86\)90014-1](https://doi.org/10.1016/0022-0531(86)90014-1)
- CEPAL. (2022). *Estudio Económico de América Latina y el Caribe: Dinámica y desafíos de la inversión para impulsar una recuperación sostenible e inclusiva*. Naciones Unidas. <https://is.gd/4yl2eg>
- Chiarella, C., Flaschel, P., & Franke, R. (2005). *Foundations for a Disequilibrium Theory of The Business Cycle*. New York: Cambridge University Press. <http://bit.ly/48q15Lg>
- Dechert, W., & Gencay, R. (1992). Lyapunov exponents as a nonparametric diagnostic for stability analysis. *Journal of Applied Econometrics*, 7(1), 41-60. <https://doi.org/10.1002/jae.3950070505>
- Eckmann, J., Oliffson, S., & Ruelle, D. (1987). Recurrence Plots of Dynamical Systems. *Europhysics Letters*, 4(9), 973-977. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/4/9/004>
- Fraser, A., & Swinney, H. (1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33(2), 1134-1140. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.1134>
- Grandmont, J. (1985). On endogenous competitive business cycles. *Journal of Economic Theory*, 35(1), 58-79. <https://doi.org/10.2307/1911010>
- Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983). Characterization of Strange Attractors. *Physical Review Letters*, 50(5), 346-349. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.346>
- Hamilton, J. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9780691218632>
- Hommes, C. (2006). Heterogeneous agent models in economics and finance. In L. Tesfatsion & K. L. Judd (Eds.), *Handbook of computational economics: Volume 2: Agent-based computational economics* (pp. 1109-1186). North-Holland. <https://is.gd/J0gnuq>
- Hsieh, D. (1991). Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets. *The Journal of Finance*, 46(5), 1839-1877. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04646.x>
- Instituto Nacional de Estadística. (2025). *Índice Global de Actividad Económica (IGAE)*. <https://bitly.cx/s7bG>
- Kantz, H., & Schreiber, T. (2003). *Nonlinear time series analysis (2nd ed.)*. Cambridge University Press. <https://bitly.cx/6GUqg>
- Katz, J. (2000). *Reformas estructurales, productividad y conducta tecnológica en América Latina*. Fondo de Cultura Económica; Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL). <https://hdl.handle.net/11362/1656>

- Kennel, M., Brown, R., & Abarbanel, H. (1992). Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45(6), 3403-3411. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.3403>
- Kyrtsou, C., Labys, W., & Terraza, M. (2004). Noisy chaotic dynamics in commodity markets. *Empirical Economics*, 29, 489-502. <https://doi.org/10.1007/s00181-003-0180-6>
- Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of The Atmospheric Sciences*, 20 (2) ,130-141. <https://is.gd/B0d7pR>
- Ocampo, J., & Ros, J. (2011). *The Oxford Handbook of Latin American Economics*. New York: Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199571048.001.0001>
- Ros, J. (2013). Introducción a "Repensar el desarrollo económico, el crecimiento y las instituciones". *Economía UNAM*, 10(30),3-19. <https://is.gd/HaPRnP>
- Rosenstein, M., Collins, J., & de Luca, C. (1993). A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 65(1-2), 117-134. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P)
- Rosser, J. (2011). *Complex evolutionary dynamics in urban-regional and ecologic-economic systems: From catastrophe to chaos and beyond*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8828-7>
- Solow, R. (2018). *La teoría del crecimiento: Una exposición*. México: Fondo de Cultura Económica. <https://is.gd/TOID1O>
- Takens, F. (1981). *Detecting strange attractors in turbulence*. En D.Rand & L.S.Young (Eds.), *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980. Lecture Notes in Mathematics, vol. 898* (pp. 366-381). Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0091924>

## Transparencia

### Conflicto de interés

El autor declara que no existen conflictos de interés de naturaleza alguna como parte de la presente investigación.

### Fuente de financiamiento

El autor financia completamente la investigación.

### Contribución de autoría

Gustavo Vladimir Fuentes Guzmán: Conceptualización, metodología, software, validación, análisis formal, investigación, gestión de datos, visualización, redacción - preparación del borrador original, redacción - revisión y edición, financiamiento, administración del proyecto, recursos, supervisión.

El autor contribuye activamente en el análisis de los resultados, revisión y aprobación del manuscrito final.